Interfaceのダイナミクス*)

九大理　川崎恭治

ソリトン研究の魅力の一つは疑いもなく、一次元に限れば多くの非線形発展方程式の厳密解が求められると云う数学的側面にある。しかし一次元問題として扱えられる物理現象はごく限られており、したがってソリトン的概念が物理現象の理解に有用である為には次元数が1より大きい場合についても、数学的厳密さを犠牲にしても注意を向けて行く必要があるように思われる。ここではそのような立場から非線型現象の一つの典型である相境界面のダイナミックスを考察してみる。具体例として以下では秩序変数が保存しない場合の局所的秩序変数 $S(\mathbf{r})$ のとる確率分布関数 $P(\{S\},t)$ に対するTDGL方程式をとるが、考え方及び方法はこの場合に限られない。先ずモデル方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}P(\{S\},t)=L\int d\mathbf{r}\,\frac{\delta}{\delta S(\mathbf{r})}\left[\frac{\delta}{\delta S(\mathbf{r})}+\frac{\delta H\{S\}}{\delta S(\mathbf{r})}\right]P(\{S\},t) \tag{1}$$

但し

$$H\{S\}=\frac{1}{2}\int d\mathbf{r}\,(\nabla S)^2+\int d\mathbf{r}\,\phi(S(\mathbf{r})) \tag{2}$$

はGinzburg-Landau-Wilsonハミルトニアンで通常 $\phi(S)=-\frac{1}{2}\tau S^2+\frac{g}{4!}S^4$ とする。Interfaceが存在するのは T_c 以下であり、したがって $\tau>0$ とする。平衡状態でInterface近傍を除けば $S=\pm M_e$, 但し $M_e=[6\tau/g]^{1/2}$。又 $z=0$ にある平面にInterfaceがある時、その近傍では $S(\mathbf{r})=M_e\tanh(z/\xi_0)$, $\xi_0^{-1}=(\tau/2)^{1/2}$。Interfaceがsharpにきまる為にはその厚さ ξ_0 が他の特徴的長さに比して充分小さければよい。この事は τ/g 即ち M_e を有限にするように、τ と g を無限大に近づける極限操作によって実現できる。この極限操作によって(1)からInterfaceの運動を記述する確率的方程式を得る事ができる。今、ある直交座標系での曲面の位置を $z=f(\mathbf{r}_\perp)$, 但し $\mathbf{r}_\perp=(x,y)$ とあらわすとこの方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}P(\{f\},t)=\frac{L}{\sigma}\int d\mathbf{r}_\perp\frac{\delta}{\delta f(\mathbf{r}_\perp)}\left[1+(\partial_{\mathbf{r}_\perp}f)^2\right]^{1/2}\left\{\frac{\delta}{\delta f(\mathbf{r}_\perp)}+\frac{\delta F}{\delta f(\mathbf{r}_\perp)}\right\}P, \tag{3}$$

但し

$$F=\sigma\int d\mathbf{r}_\perp\sqrt{1+(\partial_{\mathbf{r}_\perp}f)^2} \tag{4}$$

ここで σ は表面張力を温度で割ったもの。

---

*) 以下のべる研究のかなりの部分は太田隆夫氏との共同研究による。又研究会の後で得られた結果をも含む。

(3)の右辺第一項のthermal noiseがない時にはこれはInterfaceの曲率 $K \equiv -\sigma^{-1}\delta F/\delta f(r_\perp)$ によってdriveされるInterfaceの運動をあらわす;

$$\dot f/\sqrt{1+(\partial_{r_\perp} f)^2} = LK \qquad (5)$$

次に(3)で表わされる過程で特徴的な長さは何か考えてみる。そうするとそれは表面の曲り具合を表わす長さで、且つ充分長時間で $t^{1/2}$ に比例して増大することがわかる。その時(3)のthermal noiseの項はおとせる。今度は更に進んでそのような特徴的長さをもった分布 $P(\{f\})$ を具体的に求める事はできないだろうか。ここで臨界現象とのanalogyが役に立つ。そこでは丁度 T_c でゆらぎのスペクトルがself-similarになりそれからのズレは特徴的な長さ $\xi \propto (T-T_c)^{-\nu}$ であらわされる。これは理論的にはくりこみ群の手法によって取扱かわれる。この問題でもくりこみ群のアイデアを用いる事ができる。今すべての量を適当にrescaleして $P(\{f\},t) = \exp(-H_t\{f\})$ とおくとそのようなくりこみ群的方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}H_t\{f\} = Lk^2\int dr_\perp\sqrt{1+(\partial_{r_\perp}f)^2}\left[-K\frac{\delta H_t}{\delta f}+\frac{\delta K}{\delta f}\right]+\frac{\dot k(t)}{k(t)}\left[\nu A-(d-1)H_t\right] \qquad (6)$$

となる。或は $\dot k/k^3 = -cL$ を用い $k(t)/k(0) = e^{-\ell}$ とおくと

$$\frac{\partial H_t}{\partial \ell} = -\frac{1}{c}\int dr_\perp\sqrt{1+(\partial_{r_\perp}f)^2}\,K\frac{\delta H_t}{\delta f}-\frac{\tilde\nu}{c}A+(d-1)\left[H_t-\langle H_t\rangle_t\right] \qquad (7)$$

となる。ここで $c, \nu, \tilde\nu$ は正の数、Kは面の平均曲率、Aは全面積、dはbulk相の空間次元である。相転移の場合のくりこみ群では我々が勝手に短波長のゆらぎを消去して行くがここではそれが自動的に時間によって行われている。(7)式の固定点があるだろうが、その一つは $k(t)^{-1}$ なる特徴的スケールで膨張しつつある世界で眺めた定常分布をあたえる筈である。尚、(7)式では既に長さ $k(t)^{-1}$ が $t^{1/2}$ のようにスケールされる事を用いているが、より正統的なくりこみ群の方法ではこの事も一つのRG方程式から出せるようになっている。

所でこの問題で時間反転をすると乱流の問題と大変似た性格をもっている事がわかる。乱流では大きな渦が不安定により次々に小さな渦にカスケード的に分解される過程を問題にする(或は渦糸が細く長くなりもつれて行く過程)。我々の場合には時間反転をする(これは温度を元の温度に戻す所謂reverse quenchではない事に注意)と今まで2相の境をなしていた平らな境界面が不安定になり曲率に比例したスピードで曲がって行き遂には細かいシワになって全空間をおおう。この様な問題にはフラクタルの考えが有効な筈でこの方向からも研究を進めつつある。これについては別の所で報告したい。

[付記] 研究会で質問があった2つの面が接触しあうような過程は存在しない。即ち時間を正の向きにとって考えると曲率が大きい面は小さい面よりも速く動くので面は互に離れて行く傾向をもつ。